BLOQUE I: PRELIMINARES

Tema 1: INTRODUCCIÓN
Lógica
Grado en Ingeniería Informática

Alessandra Gallinari

URJC

Contenido

Introducción

El contenido de este primer capítulo es una breve introducción a los conceptos generales que se desarrollarán en esta publicación.

La **lógica formal** es la ciencia que estudia *las leyes de inferencia en los razonamientos*.

FORMALIZACIÓN

LENGUAJE NATURAL $\longrightarrow$ LENGUAJE FORMAL+
REGLAS DE LA LÓGICA
$\Downarrow$
APLICACIONES
Álgebra, Cálculo, Matemática Discreta, Electrónica Digital, Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales, Programación, Bases de Datos, etc.

El lenguaje natural

El **lenguaje natural** que utilizamos en la comunicación humana permite un alto grado de flexibilidad.
Su **gramática**, permite determinar si una cierta frase (una combinación de palabras) es válida:
"La mesa habla suavemente" es una frase válida.

La **sintaxis** de un lenguaje (las reglas de formación de frases correctas) nos permite afirmar si una cierta combinación de palabras es válida. No se ocupa del sentido de las frase, sólo determina su validez.
La **semántica** de un lenguaje trata el estudio de los sentidos de las frases sintácticamente válidas.
Así, la frase "La mesa habla suavemente" es sintácticamente correcta, pero falta de sentido semántico.

El lenguaje formal

La flexibilidad de los lenguajes naturales se basa en la complejidad de sus gramáticas. Es muy complicado, si no imposible, dar una representación completa de las reglas sintácticas de los lenguajes hablados.
Si queremos poder formular sólo afirmaciones que se puedan definir correctas (sintácticamente) o verdaderas (semánticamente) sin ningún grado de ambigüedad, tendremos que definir un lenguaje más preciso, un **lenguaje formal**.
Sin un lenguaje formal sería imposible estudiar las matemáticas, programar un ordenador y, en general, desarrollar razonamientos científicamente irrefutables.

El lenguaje formal

El siguiente ejemplo ilustra como en el lenguaje natural, en este caso en español, existen oraciones para las cuales ni siquiera tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas.

Ejemplo

Las frases "¿Cómo te llamas?" y "Por favor, dame tu libro" son dos ejemplos de oraciones a las cuales no podemos asociar un valor de verdad verdadero o falso.

El lenguaje formal

Proposiciones

El lenguaje formal de la lógica se construye a partir de unos elementos básicos (atómicos) llamados
proposiciones: oraciones declarativas (apofánticas) simples, a las cuales se pueden asociar valores de verdad sin ninguna ambigüedad.
"¿Cómo te llamas?" y "Por favor, dame tu libro" no son proposiciones, sin embargo las frases "Hoy llueve" o "Estudio mucho" lo son.

Metalenguaje

Definimos **metalenguaje** al lenguaje, en nuestro caso el español, que vamos a usar para definir un lenguaje formal.

Por ejemplo, en la frase " $\sqrt{2}$ es el número real positivo tal que su cuadrado es igual a 2" se usa el metalenguaje español para definir el símbolo matemático $\sqrt{2}$, que pertenece a un lenguaje formal.

Estructura del lenguaje formal

En la lógica clásica las definiciones básicas de razonamiento y de validez son las siguientes:
Razonamiento (deducción, inferencia, argumento): es la obtención de un nuevo conocimiento (conclusión) a partir de una serie de conocimientos (premisas).
Validez formal de un razonamiento: un razonamiento es formalmente válido si la conclusión es necesariamente verdadera, siendo las premisas verdaderas.

Estructura del lenguaje formal

Ejemplo

Razonamiento válido:
Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura.
Premisa 2: No he aprobado la asignatura.

Conclusión: No he estudiado todo el temario.

Razonamiento no válido:
Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura.
Premisa 2: No he estudiado todo el temario.

Conclusión: No apruebo la asignatura.

Estructura del lenguaje formal

En las matemáticas es necesario aprender a distinguir entre razonamientos que son matemáticamente correctos (las demostraciones) y razonamientos que no lo son. Además, para poder resolver problemas concretos es necesario desarrollar la habilidad de construir razonamientos matemáticos originales.
La lógica proporciona las herramientas necesarias para el razonamiento matemático, pero también para muchas otras aplicaciones.
El diseño de circuitos de un ordenador y la verificación de la validez de un programa son sólo dos ejemplos de estas aplicaciones en el contexto de la informática.

Estructura del lenguaje formal

Resumiendo, la estructura de todo lenguaje formal viene definida por su sintaxis, semántica y sistemas de demostración:

Sintaxis (reglas de formación, gramática): es la definición axiomática de los elementos básicos del lenguaje y de las reglas que permiten obtener nuevas expresiones correctas a partir de aquellos. Las expresiones admitidas por el lenguaje se denominan **fórmulas**.
Semántica (relación entre el lenguaje y su significado): es la definición de un conjunto de significados (generalmente verdadero o falso) que se puedan asociar a una fórmula. Permite definir la validez de una fórmula o de un razonamiento.
Sistemas de demostración: son sistemas formales que permiten averiguar cuándo una fórmula o un razonamiento son válidos. En el contexto de la sintaxis se denominan **teoría de la demostración**. En el caso de la semántica se denominan **teoría interpretativa**.

Niveles de la lógica formal

Lógica proposicional (lógica de proposiciones, **LP**): en la lógica proposicional se estudian las fórmulas proposicionales construidas a partir de fórmulas atómicas (proposiciones declarativas simples) y conectivos lógicos (y, o, implica, etc.).

Ejemplo

1) Formalización de frases:
Estudio todo el temario (e);
No estudio todo el temario($\neg(e)$);
Apruebo la asignatura (a);
Estudio todo el temario y apruebo la asignatura ($e \wedge a$);
Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).

Niveles de la lógica formal

Ejemplo

2) Formalización de razonamientos:

Razonamiento válido:
Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).
Premisa 2: No he aprobado la asignatura ($\neg(a)$)

Conclusión: No he estudiado todo el temario ($\neg(e)$)

Razonamiento no válido:
Premisa 1: Si estudio todo el temario, entonces apruebo la asignatura ($e \longrightarrow a$).
Premisa 2: No he estudiado todo el temario ($\neg(e)$)

Conclusión: No apruebo la asignatura ($\neg(a)$)

Niveles de la lógica formal

Lógica de predicados de primer orden, (LPO): la lógica de primer orden es una generalización de la lógica de proposiciones.
Distingue entre los objetos del discursos y sus propiedades o posibles relaciones entre ellos.
Además, introduciendo nuevos elementos como los cuantificadores existenciales y universales ($\exists$: existe un, $\forall$: para todo), permite estudiar la estructura interna de los enunciados.

Niveles de la lógica formal

Ejemplo

1) Formalización de una frase:
"El cuadrado de todo número real es no negativo."
Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $P(x) : x$ es un número no negativo. La formalización de nuestra frase es:

$$(\forall x(P(x^2)).$$

Niveles de la lógica formal

Ejemplo

2) Formalización de un razonamiento (válido):

Sean D el conjunto de los seres, $P(x): x$ es una persona, $M(x): x$ es mortal y s el símbolo constante "Socrates."
Entonces podemos formalizar el siguiente razonamiento:
Premisa 1: Todas las personas son mortales ($\forall x(P(x) \longrightarrow M(x))$)
Premisa 2: Sócrates es una persona ($P(s)$)
Conclusión: Sócrates es mortal ($M(s)$)

Niveles de la lógica formal

Lógicas de orden superior: son extensiones de la lógica proposicional y de predicados de primer orden que amplían el uso de los cuantificadores a las propiedades y a las relaciones entre los objetos.
Notar que en la lógica de primer orden los cuantificadores se refieren sólo a los objetos.

Resumen de la historia de la lógica

La definición de lógica como ciencia formal en la cultura occidental es el resultado de un largo desarrollo histórico que empieza con las obras de algunos filósofos griegos y llega hasta la actualidad.
Históricamente las áreas de aplicación más importantes de la lógica son la filosofía, las matemáticas y la informática.
A continuación se presenta un resumen muy reducido de los principales pasos que han llevado a la formulación de la lógica formal.

Lógica y filosofía

- **Siglo IV a.C.:** En el siglo cuarto antes de nuestra era **Aristóteles** fue el primero en tratar de formalizar el razonamiento humano para poder discernir en la discusiones filosóficas. Aristóteles se puede considerar el fundador de la denominada **lógica clásica**.
- **Edad Media:** Durante la Edad Media el proceso de sistematización de la lógica fue desarrollado por los filósofos árabes y los escolásticos.
- **Siglo XIII:**En el siglo XIII **Santo Tomás de Aquino** empleó la lógica en el contexto de las discusiones teológicas.
- **Siglo XVII:** Fue **Leibniz**, en el siglo XVII, el primero a formular la lógica como base del razonamiento matemático, pero sus estudios fueron abandonados hasta el siglo XIX, cuando finalmente se fundóla **lógica matemática** como ciencia.

Lógica y matemáticas

- **1854:** A mediados del siglo XIX, en el 1854, el inglés **George Boole** publicó el libro *The Laws of Thought* (Las leyes del pensamiento). Influenciado por las teorías de los matemáticos **De Morgan** y **Hamilton**, Boole definióla lógica como sistema formal dirigido no sólo al estudio del lenguaje natural. Su obra proporciona un modelo algebraico de la **lógica de proposiciones**. El modelo matemático conocido como álgebra de Boole es otro ejemplo muy importante en informática usado para el diseño de circuitos lógicos y las búsquedas booleanas en grandes colecciones de datos (indices de páginas Web, datos genéticos, etc.).
- **1879:**En el 1879 el alemán **Gottob Frege** publicó el libro *Grundgesetze der Aruthmetik: Begriffsschriftlich abgeleitet* (Fundamentos de Aritmética: Conceptualmente derivada), en el cuál se formaliza la **lógica de predicados**.

Lógica y matemáticas

- **1920, 1930:** A principios del siglo XX **Bertrand Russell** y **Whitehead**, inspirados por el trabajo del matemático italiano **Giuseppe Peano**, publicaron los tres volúmenes de *Principia Mathematica* y **Hilbert**, en 1920, propuse el problema de la axiomatización de las matemáticas.

  Programa de Hilbert:
  1. toda la matemática se sigue de un sistema **finito** de axiomas escogidos correctamente,
  2. tal sistema axiomático se puede probar **consistente** (tal que no se puede demostrar la validez de una fórmula y de su negación).

Lógica y matemáticas

En 1930 **Gödel** demuestró el famoso teorema de incompletitud del enfoque axiomático:
"En cualquier formalización consistente de las matemáticas que sea lo bastante fuerte para definir el concepto de números naturales, se puede construir una afirmación que ni se puede demostrar ni se puede refutar dentro de ese sistema."
Este teorema contesta negativamente al problema de Hilbert.

Lógica y matemáticas

De este "debate" nació directamente la base para la **informática teórica** de Alonzo Church y Alan Turing.

- **1936-1937: A. Church** y **A. Turing** establecen la indecidibilidad de la lógica de primer orden: no existe un procedimiento general y finito (un algoritmo) que permita decidir si una fórmula de la lógica de primer orden es válida o deducible a partir de un conjunto de fórmulas.

El resultado de todas estas obras fue la base teórica de la teoría axiomática y semántica.

Lógica e informática

- **1950, 1960:** Una nueva época para la lógica comienza en las décadas de 1950 y 1960 a causa de la aparición de los ordenadores. Surgió entonces la necesidad de determinar si fuese posible especificar formalmente programas y definir sistemas de demostración automática de teoremas. Estos tipo de problemas son los principales objetos de estudio de la **lógica informática**.
  El nacimiento de la inteligencia artificial y del primer lenguaje declarativo (LISP) se puede fijar en el 1959, con el trabajo de **Mc Carthy**.
- **1965:** A lo largo de los años sesenta se mejoran los primeros sistemas de demostración automática y en el 1965 aparece la regla universal de resolución con unificación de **Robinson**.

Lógica e informática

- **1972:** En los años setenta se desarrolló la **programación lógica** como herramienta de resolución de problemas. En 1972 **Colmerauer** creó el primer lenguaje de programación lógica: Prolog. La programación lógica está en la base de la inteligencia artificial y permite deducir nuevos conocimientos a partir de una base de conocimientos (los axiomas) y una serie de deducciones automáticas.
- **1980:** A partir de los años ochenta se empiezan a utilizar nuevas **lógicas no clásicas**, como, por ejemplo, lógicas que permiten dar una interpretación probabilista de la incertidumbre.

Lógica e informática

Los métodos deductivos de la lógica matemática están en la base de la demostración automática de teoremas. Definida la semántica de un lenguaje de programación, se pueden usar los métodos de demostración de la lógica matemática para verificar (automáticamente) la corrección de programas y sus propiedades.
En general, el problema es encontrar sistemas de demostración más eficientes para su implementación en un ordenador.

Algunas de las áreas de aplicación de la lógica en informática son:

- La minería de datos.
- La descripción de la semántica de los lenguajes de programación y la verificación de programas.
- La demostración automática de teoremas.
- La programación lógica y los sistemas basados en el conocimiento en la inteligencia artificial.